1. Musbat a, b, c sonlari $a+b+c=1$ tenglikni qanoatlantirsa, u holda

$$10\left(a^3+b^3+c^3\right)-9\left(a^5+b^5+c^5\right)\geq 1$$

tengsizlikni isbotlang.

T= $9\left(a^3+b^3+c^3-a^5-b^5-c^5\right)\geq 1-a^3-b^3-c^3$

$9(a^3-a^5+b^3-b^5+c^3-c^5)=9(a^3(1-a)(1+a)+b^3(1-b)(1+b)+c^3(1-c)(1+c))=$

$= 9(a^3(b+c)(a+b+a+c)+b^3(a+c)(a+b+b+c)+$

$$+c^3(a+b)(a+c+b+c))=9(a^3(b+c)(a+b)+a^3(b+c)(a+c)+$$

$$b^3(a+c)(a+b)+b^3(a+c)(b+c)+c^3(a+b)(a+c)+c^3(a+b)(b+c))=$$

$$9((b+c)(a+b)(a^3+c^3)+(b+c)(a+c)(a^3+b^3)+(a+b)(a+c)(b^3+c^3))=$$

$$9(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2-ac+a^2+b^2-ab+b^2+c^2-bc).$$

$$T\geq 1-a^3-b^3-c^3$$

Ekanligini ko'rsatish yetarli.

T=9(a+b)(b+c)(c+a)(2($a^2+b^2+c^2$)-ab-bc-ac)≥1-a^3-b^3-c^3

T=9(a+b)(b+c)(c+a)(2($a^2+b^2+c^2$)-ab-bc-ac)≥$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3a^2b+$
$+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$

9(a+b)(b+c)(c+a)(2($a^2+b^2+c^2$)-ab-bc-ac)≥$3a^2b+3a^2c+3b^2a+$
$+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$

3(a+b)(b+c)(c+a)(2($a^2+b^2+c^2$)-ab-bc-ac)≥(a+b)(b+c)(c+a)

(a+b)(b+c)(c+a)(6($a^2+b^2+c^2$)-3(ab+bc+ac)-1) ≥0

ekanligini ko'ramiz $a, b, c, \in R^+$ эканлигидан уларнинг йиғиндиси ҳам R^+ га қарашли, шунинг учун

$6\left(a^2+b^2+c^2\right)-3(ab+bc+ca)\geq 1$эканлигини кўрсатамиз.

Қуйидаги тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб,

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 1,\ \left(a^2+b^2+c^2\right)\geq(ab+bc+ca) \qquad (1)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

2. Musbat a, b, c va natural n, k sonlar ushun

$$\frac{a^{n+k}}{b^k}+\frac{b^{n+k}}{c^k}+\frac{c^{n+k}}{a^k}\geq a^n+b^n+c^n$$

tengsizlikni isbotlang.

2. O'rta arifmetik va o'rta geometrik miqdorlar orasidagi munosabatni qo'llab

$$\underbrace{\frac{a^{n+k}}{b^k}+\ldots+\frac{a^{n+k}}{b^k}}_{n}+\underbrace{b^n+b^n+\ldots+b^n}_{k}\geq(n+k)\sqrt[n+k]{\frac{\left(a^{n+k}\right)^n b^{nk}}{b^{nk}}}=(n+k)a^n,$$

yoki

$$n\cdot\frac{a^{n+k}}{b^k}+k\cdot b^n\geq(n+k)a^n$$

Xuddi shuningdek

$$n\frac{b^{n+k}}{c^k}+kc^n\geq(n+k)b^n,\ n\frac{c^{n+k}}{a^k}+k\cdot a^n\geq(n+k)c^n$$

тенгсизликларини ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб,

$$\frac{a^{n+k}}{b^k}+\frac{b^{n+k}}{c^k}+\frac{c^{n+k}}{a^k}\geq a^n+b^n+c^n$$

ҳосил қиламиз.

3. (*Россия 2003*) мусбат a,b ,c сонлар a+b+c=1 шартни қаноатлантирилса. У ҳолда $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$ тенгсизликни исботланг.

3. LEMMA.x ва y мусбат сонлар учун $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ тенгсизлик ўринли.

Исботи: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\Rightarrow(x+y)^2\geq4xy\Rightarrow(x-y)^2\geq0$тенглик $x=y$ бўлганда бажарилади: масаланинг шарти ва леммага кўра,

$$\frac{2}{1-a}+\frac{2}{1-b}+\frac{2}{1-c}=\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)+\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)+\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)\geq$$

$$\frac{4}{2b+a+c}+\frac{4}{b+a+2c}+\frac{4}{b+2a+c}=\frac{4}{1+a}+\frac{4}{1+b}+\frac{4}{1+c}\Rightarrow$$

тенгсизлик исботланган.

4. (Молдова 2005) Мусбат a,b,c сонлар $a^4+b^4+c^4=3$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-ac}+\frac{1}{4-bc}\leq1$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қўллаб,

$\frac{2}{4-ab}=\frac{4}{8-2ab}\leq\frac{4}{8-a^2-b^2}\leq\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Худди шундай

$\frac{2}{4-bc}\leq\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2}$, $\frac{2}{4-ac}\leq\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-c^2}$

Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб,
$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ac}\le\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Берилган $a^4+b^4+c^4=3$ шартдан $a^2<2$ келиб чиқади. Қуйидаги
$\left(a^2-1\right)^2(2-a^2)\ge0\Leftrightarrow\frac{1}{4-a^2}\le\frac{a^4+5}{18}$ тенгсизлик ўринли. Худди шундай $\frac{1}{4-b^2}\le\frac{b^4+5}{18}$, $\frac{1}{4-c^2}\le\frac{c^4+5}{18}$ тенгсизликлар ўринли. Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб,
$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2}\le\frac{a^4+5}{18}+\frac{b^4+5}{18}+\frac{c^4+5}{18}=1$ ҳосил қиламиз:

5. (Корея 2000) Фараз қилайлик a,b,c, x,y,t ҳақиқий сонлар қуйидаги $a\ge b\ge c>0$ ва $x\ge y\ge t>0$ шартларни қаноатлантирса,
$\frac{a^2x^2}{(by+ct)(bt+cy)}+\frac{b^2y^2}{(ct+ax)(cx+at)}+\frac{c^2t^2}{(ax+by)(ay+bx)}\ge\frac{3}{4}$ тенгсизликни исботланг.
Исбот: Берилган тенгсизликни чап томонида турган қўшилувчиларни мос равишда A,B,C деб белгилаймиз .

$$(by+ct)(bt+cy)=(b^2+c^2)yt+bc(y^2+t^2)\le\left(\frac{y^2+t^2}{2}\right)(b^2+c^2)+bc(y^2+t^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(y^2+t^2)(b+c)^2\quad\Rightarrow\quad A\ge2\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\frac{x^2}{y^2+t^2}$$

Худди шундай $B\ge2\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\frac{y^2}{t^2+x^2}, C\ge2\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\frac{t^2}{x^2+y^2}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.
Юқоридаги берилган шартларга кўра
$\frac{a}{b+c}\ge\frac{b}{c+a}\ge\frac{c}{a+b}$, $\frac{x^2}{y^2+t^2}\ge\frac{y^2}{t^2+x^2}\ge\frac{t^2}{x^2+y^2}$ муносабатлар ўринли.
Чебишев тенгсизлигини қўллаб,

$$A+B+C\ge2\cdot\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{a+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\}\left\{\frac{x^2}{y^2+t^2}+\frac{y^2}{x^2+t^2}+\frac{t^2}{x^2+y^2}\right\}\ge$$

$$\ge2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2\left(\frac{x^2}{y^2+t^2}+\frac{y^2}{t^2+x^2}+\frac{t^2}{x^2+y^2}\right)$$

Биз қуйидаги α,β,j мусбат сонлар учун
$\frac{\alpha}{\beta+j}+\frac{\beta}{j+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\ge\frac{3}{2}$ тенгсизликни исботлаймиз.
$\alpha+\beta=\tau,\quad\beta+j=s,\ j+\alpha=t$ белгилаш киритиб

$$\frac{\alpha}{\beta+j}+\frac{\beta}{j+\alpha}+\frac{j}{\alpha+\beta}=\frac{\tau+t-s}{2s}+\frac{\tau+s-t}{2t}+\frac{s+t-\tau}{2\tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{s}+\frac{t}{s}+\frac{\tau}{t}+\frac{s}{t}+\frac{s}{\tau}+\frac{t}{\tau}-3\right)$$

$$\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$$

$$A+B+C\geq 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

Тенглик a=b=c ва x=y=t бўлганда бажарилади.

6. (Япония 2002) $n\geq 3$, $n\in N$ ва мусбат $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ сонлар қуйидаги $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ *ва* $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$ шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $a_1(b_1+a_2)+a_2(b_2+a_3)+\ldots+a_n(b_n+a_1)<1$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Қуйидаги ифодани $t=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ белгилаб,

$$\begin{aligned}
&a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_{n-1}+a_na_1\\
&\leq a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+\ldots+a_1a_n\\
&\quad+a_2a_3+a_2a_4+\ldots+a_2a_n\\
&\quad+a_3a_4+\ldots+a_3a_n\\
&\quad+\ldots..\\
&\quad+a_{n-1}a_n=
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a_1+a_2+\ldots a_n)^2-\left(a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2\right)\right]=\frac{1}{2}(1-t)$$

тенгсизликни топамиз. Бу ердан келиб чиқадики t<1
Коши Буняковский тенгсизлигини љўллаб,

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_2^2\right)=t \quad \textit{ёки}$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leq\sqrt{t} \quad \textit{топамиз}$$

У ќолда

$$a_1(b_1+a_2)+a_2(b_2+a_3)+\ldots+a_n(b_n+a_1)=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)+$$

$$+(a_1a_2+a_2a_3+\ldots.+a_na_1)\leq\sqrt{t}+\frac{1}{2}(1-t)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-1\right)^2+1<1$$

7. (Япония 1997) Берилган мусбат a,в,с сонлар учун қуйидаги $\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Берилган тенгсизликни умумий махражга келтириб,

$$5\left[(b+c-a)^2\left((c+a)^2+b^2\right)\left((a+b)^2+c^2\right)+(c+a-b)^2\left((b+c)^2+a^2\right)\left((a+b)^2+c^2\right)+\right.$$
$$+(a+b-c)^2\left((b+c)^2+a^2\right)\left((c+a)^2+b^2\right)-$$
$$\left.-3\left((b+c)^2+a^2\right)\left((c+a)^2+b^2\right)\left((a+b)^2+c^2\right)\right]=4\left[3\left(a^6+b^6+c^6\right)+\right.$$
$$+\left(a^5b+ab^5+b^5c+bc^5+c^5a+ca^5\right)-\left(a^4b^2+a^2b^4+b^2c^4+c^2b^4+c^4a^2+c^2a^4\right)+$$
$$+2\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right)+3abc\left(a^3+b^3+c^3\right)-6abc\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\right)+$$
$$\left.+12a^2b^2c^2\right]=4\left[bc(c-a)^2(a-b)^2+ca(a-b)^2(b-c)^2+ab(b-c)^2(c-a)^2\right]+$$
$$+4abc\left[(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2\right]+$$
$$+8\left[a^3(b+c)(b-c)^2+b^3(c+a)(c-a)^2+c^3(a+b)(a-b)^2\right]+$$
$$+6\left[(a^3-b^3)^2+(b^3-c^3)^2+(c^3-a^3)^2\right]+$$
$$+4\left[ab(a^2+ab+b^2)(a-b)^2+bc(b^2+bc+c^2)(b-c)^2+ca(c^2+ac+a^2)(c-a)^2\right]\geq 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

8. a,b,c мусбат сонлар $a+b+c=1$ шартни қаноатлантирса. У ҳолда

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+b}}\leq\frac{3}{2}$$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Берилган тенгсизликни чап томонини Т билан белгилаб, ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қўллаймиз, яъни:

$$T=\sqrt{\frac{ab}{ab+1-a-b}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+1-b-c}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+1-a-c}}=$$
$$=\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}}+\sqrt{\frac{bc}{(1-b)(1-c)}}+\sqrt{\frac{ac}{(1-a)(1-c)}}\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-b}+\frac{b}{1-a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{1-c}+\frac{c}{1-b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-c}+\frac{c}{1-a}\right)\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{b+a}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{3}{2}$$

9. (Жамшид) x,y,t мусбат сонлар $xyt\geq 1$ шартни қаноатлантирса,

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+t^2}+\frac{y^5}{y^5+t^2+x^2}+\frac{t^5}{t^5+x^2+y^2}\geq 1$$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $yt(y^2+t^2)=y^3t+yt^3\leq y^4+t^4$ тенгсизлик ўринли, чунки

$$y^4-y^3t-yt^3+t^4=\left(y^3-t^3\right)(y-t)\geq 0 \quad\Rightarrow$$
$$x(y^4+t^4)\geq xyt\left(y^2+t^2\right)\geq y^2+t^2 \quad \text{ёки}$$
$$\frac{x^5}{x^5+y^2+t^2}\geq\frac{x^5}{x^5+x(y^4+t^4)}=\frac{x^4}{x^4+y^4+t^4}$$ худди шундай

$\frac{y^5}{y^5+x^2+t^2} \ge \frac{y^4}{x^4+y^4+t^4}$, $\frac{t^5}{t^5+x^2+y^2} \ge \frac{t^4}{x^4+y^4+t^4}$ бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўшиб исботи талаб қилинган тенгсизликни ҳосил қиламиз.

10. (ХМО 2005) Мусбат x, y, t сонлар $xyt \ge 1$ шартни қаноатлантирса,
$\frac{x^5}{x^5+y^2+t^2} + \frac{y^5}{y^5+t^2+x^2} + \frac{t^5}{t^5+x^2+y^2} \ge 0$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Юқоридаги тенгсизликни қуйидагича ёзиб оламиз.
$\frac{x^2+y^2+t^2}{x^5+y^2+t^2} + \frac{y^2+x^2+t^2}{x^5+t^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+t^2}{t^5+x^2+y^2} \le 3$ ва Коши Буняковский тенгсизлиги қўллаб,

$(x^5+y^2+t^2)(yt+y^2+t^2) \ge (x^{\frac{5}{2}}(yt)^{\frac{1}{2}}+y^2+t^2)^2 \ge (x^2+y^2+t^2)^2$ *ёки*

$\frac{x^2+y^2+t^2}{x^5+y^2+t^2} \le \frac{yt+y^2+t^2}{x^2+y^2+t^2}$ *худдишундай*

$\frac{x^2+y^2+t^2}{x^5+y^2+t^2} \le \frac{xt+x^2+t^2}{x^2+y^2+t^2}$, $\frac{x^2+y^2+t^2}{t^5+x^2+y^2} \le \frac{xy+x^2+y^2}{x^2+y^2+t^2}$

муносабатларни ҳосил қиламиз.
Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшсак,

$$\frac{x^2+y^2+t^2}{x^5+y^2+t^2} + \frac{x^2+y^2+t^2}{y^5+x^2+t^2} + \frac{x^2+y^2+t^2}{t^5+x^2+y^2} \le 2 + \frac{xy+yt+tx}{x^2+y^2+t^2} \le 3$$

11. (Босния 2002) Агар мусбат x, y, t сонлар $xyt = x+y+t+2$ тенгликни қаноатлантирса,
$5(x+y+t)+18 \ge 8(\sqrt{xy}+\sqrt{yt}+\sqrt{tx})$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот: α, β, j учбурчак бурчаклари учун
$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2 j + 2\cos\alpha\cos\beta\cos j$ тенгликдан фойдаланиб,

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos j} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos j\cos\alpha} \cdot \frac{\cos j}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos j} + \frac{\cos\beta}{\cos j\cos\alpha} + \frac{\cos j}{\cos\alpha\cos\beta} + 2$$

ифодани ҳосил қиламиз
$x = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos j}$, $y = \frac{\cos\beta}{\cos j\cos\alpha}$, $t = \frac{\cos j}{\cos\alpha\cos\beta}$ деб белгилаш киритиб ва
$\cos\alpha + \cos\beta + \cos j \le \frac{3}{2}$ тенгсизликдан фойдалансак,

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yt}} + \frac{1}{\sqrt{tx}} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \quad 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{t}) \le 3\sqrt{xyt} \Leftrightarrow$$

$$4(x+y+t+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yt}+\sqrt{tx})) \le 9xyt \Leftrightarrow$$

$$8(\sqrt{xy}+\sqrt{yt}+\sqrt{tx}) \le 9(x+y+t+2) - 4(x+y+t) = 5(x+y+t)+18$$

12. (АРМО 2005) Мусбат a,b,c сонлар $abc=8$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда.

$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қўллаб,

$$\sqrt{1+a^3}=\sqrt{(1+a)(1+a^2-a)}\le\frac{2+a^2}{2},\ \sqrt{1+b}=\sqrt{(1+b)(1-b+b^2)}\le\frac{2+b^2}{2},$$

$$\sqrt{1+c^3}=\sqrt{(1+c)(1-c+c^3)}\le\frac{2+c^2}{2}$$

муносабатларни топамиз. Энди қуйидаги тенгсизликни исботласак, етарли.

$$\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}\ge\frac{4}{3}\Leftrightarrow$$

$$3\left(a^2(2+c^2)+b^2(2+a^2)+c^2(2+b^2)\right)\ge(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)\Leftrightarrow$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2+b^2+c^2)\ge a^2b^2c^2+8=72$$

Бу тенгсизлик љуйидаги тенгсизликларни ќадма-ќад љњшишдан ќосил љилинади:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge3\sqrt[3]{(abc)^4}=48$$

$$2(a^2+b^2+c^2)\ge6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=24$$

Булардан исботи талаб љилинган тенгсизликни ќосил љиламиз.

13. (Россия) Мусбат ҳақиқий х ва у сонлар $x^2+y^3\ge x^3+y^4$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $x^3+y^3\le2$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Биринчи бўлиб $x+y^2\ge x^2+y^3$ тенгсизликни исботлаймиз. Фараз қилайлик $x+y^2<x^2+y^3$ бўлсин ва $x^3+y^4\le x^2+y^3$ тенгсизликдан фойдалансак, $2(x^2+y^3)\ge(x+x^3)+(y^2+y^4)\ge2x^2+2y^3$ бу эса фаразга зид.

$$\Rightarrow x+y^2\ge x^2+y^3\ge x^3+y^4\Rightarrow 2(x+y^2)\ge x^2+y^3+x^3+y^4\ge$$

$$\ge x^3+y^3+2x-1+2y^2-1\Rightarrow x^3+y^3\le2$$

14. (АРМО 2003) $a,b,c,$ учбурчак томонлари бўлиб, $a+b+c=1$ шартли қаноатлантирса ва $n\ge2,\ n\in N$ учун.

$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}$ тенгсизликни исботланг. (1-усул)

Исбот: Умумийликка зарар етказмасдан $a \geq b \geq c$ деб олиб ва учбурчак тенгсизлигини қўлласак $a > b + c,\ 1 = a + b + c > 2a \Rightarrow\ b \leq a < \frac{1}{2}$ ва

$a^n + b^n < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} \Rightarrow \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}$ (*) энди қўйидагини қараймиз

$\left(b + \frac{c}{2}\right)^n = b^n + \frac{n}{2} c\, b^{n-1} + \ldots + \frac{c^n}{2^n} > b^n + c^n$ (чунки $\frac{n}{2} c b^{n-1} > c^n$) худи шундай

$\left(a + \frac{c}{2}\right)^n > a^n + c^n$ юқоридагилардан $\left(b^n + c^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}} < b + \frac{c}{2} + a + \frac{c}{2} = 1$(**)

(*) ва (**) ларни ќадма-ҳад қўшиб, исботи талаб этилган тенгсизликни ҳосил қиламиз.

15. Мусбат $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлар қуйидаги

$g_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},\ A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},\ \ G_n = \sqrt[n]{A_1 A_2 \ldots A_n}$ шартларни қаноатлантирса,

у ҳолда $n \cdot \sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}} + \frac{g_n}{G_n} \leq n + 1$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $\frac{A_{k-1}}{A_k} = x_k$ ва $x_1 = 1$ белгилаш киритиб,

$$n\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}} = n \cdot \sqrt[n^2]{\frac{A_1 A_2 \ldots A_n}{A^n}} = n \cdot \sqrt[n^2]{\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{A_2}{A_3}\right)^2\left(\frac{A_3}{A_4}\right)^3 \ldots \left(\frac{A_{n-1}}{A_n}\right)^{n-1}} =$$

$$= n\sqrt[n^2]{x_2 x_3^2 x_4^3 \ldots x_n^{n-1}} = n\sqrt[n^2]{x_1^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot x_2 x_3^2 x_4^3 \ldots x_n^{n-1}};$$

$$\frac{a_k}{A_k} = \frac{kA_k - (k-1)A_k}{A_k} = k - (k-1)\frac{A_{k-1}}{A_k} = k - (k-1)x_k;$$

$$\frac{g_n}{G_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{A_1} \cdot \frac{a_2}{A_2} \ldots \frac{a_n}{A_n}} = \sqrt[n]{1.(2 - x_2)(3 - 2x_3)\ldots(n - (n-1)x_k)}$$

Умумлашган ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатдан фойдалансак ($a_i > o,\ \alpha_i > o,\ i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sqrt[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_n]{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}} \leq \frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$),

$$n\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}} + \frac{g_n}{G_n} = n\sqrt[n^2]{x_1^{\frac{n(n+1)}{2}} x_2 x_3^2 \ldots x_n^{n-1}} + \sqrt[n]{1 \cdot (2 - x_2)(3 - 2x_3)\ldots(n - (n-1)x_n)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + x_2 + 2x_3 + \ldots + (n-1)x_n\right) + \frac{1}{n}(1 + (2 - x_2) + (3 - 2x_3) + \ldots + (n-1)x_n)$$

$$\frac{n+1}{2} + \frac{1}{n}(x_2 + 2x_3 + \ldots + (n-1)x_n) + \frac{(n+1)}{2} - \frac{1}{n}(x_2 + 2x_3 + \ldots + (n-1)x_n) = n + 1$$

16. (Япония 2005) Мусбат a, b, c сонлар йиғиндиси бир бўлса, у ҳолда
$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\le 1$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Бу тенгсизликнинг чап томонини S билан белгилаб ва қуйидаги усулда ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар ўртасидаги муносабатни қўллаймиз:

$$S\le a\left(\frac{1+1+(1+b-c)}{3}\right)+b\left(\frac{1+1+(1+c-a)}{3}\right)+c\left(\frac{1+1+(1+a-b)}{3}\right)=$$

$$\frac{3a+3b+3c+ab+ac+bc-ba-ca-cb}{3}=1$$

17. (Кубок Колмогоров 2004) Мусбат ҳақиқий a, b, c, d сонлар $abcd=1$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда
$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\ge 4$ тенгсизликни исботланг.

Исбот:

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}=\left(\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+cd}{1+c}\right)+\left(\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+da}{1+d}\right)=$$

$$=\left(\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+ab}{ab(1+c)}\right)+\left(\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+bc}{bc(1+d)}\right)=$$

$$=(1+ab)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab(1+c)}\right)+(1+bc)\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc(1+d)}\right)\ge$$

$$\ge\frac{4(1+ab)}{1+a+ab(1+c)}+\frac{4(1+bc)}{1+b+bc(1+d)}=4$$

18. (Кубок Колмогоров 2004) Мусбат a, b, c сонларнинг йиғиндиси бирга тенг бўлса,
$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b(b+1)}+\frac{b}{c(c+1)}+\frac{c}{a(a+1)}\right)\ge\frac{3}{4}$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот: Бу тенгсизликни чап томонини T билан белгилаб, умумлашган Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидагича қўллаймиз:

$$T\cdot\left(a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\right)\ge(a+b+c)^3=1 \quad ёки \quad T\ge\frac{1}{ab+bc+ca+1}$$

тенгсизликни ва ундан $T\ge\frac{1}{ab+bc+ca+1}\ge\frac{1}{\frac{(a+b+c)^2}{3}+1}=\frac{3}{4}$

муносабатни ҳосил қиламиз.

19. (Квант) $a+b+c=1$ шартни қаноатлантирувчи мусбат a,b,c сонлар учун

$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geq 2$ тенгсизликни ўринли бўлишини исботланг.

Исбот:

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}=\frac{a(1-b-c)+b}{b+c}+\frac{b(1-a-c)+c}{c+a}+\frac{c(1-a-b)+a}{a+b}=$$

$$=\frac{a+b}{b+c}-a+\frac{b+c}{c+a}-b+\frac{c+a}{c+b}-c=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}-1\geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}-1=3-1=2$$

20. Мусбат x,y,t сонлар учун

$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+t)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+x)(y+t)}}+\frac{t}{t+\sqrt{(t+x)(t+y)}}\leq 1$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ихтиёрий $x,y,t>0$ учун $\left(x-\sqrt{yt}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+yt\geq 2\sqrt{x^2yt}\Leftrightarrow$

$$x^2+xy+xt+yt\geq xy+2\sqrt{x^2yt}+xt\Leftrightarrow (x+y)(x+t)\geq\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xt}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+y)(x+t)}\geq\sqrt{xy}+\sqrt{xt}$$

љуйидаги муносабатни топамиз. Бундан

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+t)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(x+y)(t+y)}}+\frac{t}{t+\sqrt{(t+x)(t+y)}}\leq$$

$$\leq\frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xt}}+\frac{y}{y+\sqrt{yx}+\sqrt{yt}}+\frac{t}{t+\sqrt{tx}+\sqrt{ty}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}=1$$

21. (Хитой 2004) Мусбат a,b,c сонлар учун

$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Коши Буняковский тенгсизлигини қўллаб,

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\leq\sqrt{\left(\frac{2a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{2b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}+\frac{2c\ldots}{(c\ldots}\right.}$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{a+c}{2(a+b+c)}+\frac{b+a}{2(a+b+c)}+\frac{c+b}{2(a+b+c)}\right)}=$$

$$=\sqrt{2\cdot(a+b+c)\left(\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}\right)}$$ муносабатни

ḱосил љиламиз. Энди

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}\right)=\frac{2(a+b+c)(ab+ac+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\frac{9}{4}$$

ёки

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca)\leq 9(a+b)(b+c)(c+a)\Leftrightarrow\ 6abc\leq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$$

тенгсизликни исботлаш етарли. Бу тенгсизлик эса ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар ўртасидаги муносабатга кўра ўринли. Булардан юқоридаги исботи талаб этилган тенгсизлик исботланди.

22. (Туркия 1998) Агар $0 \le a \le b \le c$ шарт бажарилса, $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \ge 60abc$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни љуйидагича қўллаймиз:

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) = (a+b+b+b)(b+c+c+c+c)$$

$$\ge 4\sqrt[4]{ab^3}\cdot 5\sqrt[5]{b\cdot c^4}\cdot 3\sqrt[3]{a^2c} = 60\, a^{\frac{11}{12}}\cdot b^{\frac{19}{20}}\cdot c^{\frac{17}{15}} =$$

$$= 60abc\frac{c^{\frac{2}{15}}}{a^{\frac{1}{12}}\cdot b^{\frac{1}{20}}} = 60\,abc\frac{c^{\frac{1}{12}}\cdot c^{\frac{1}{20}}}{a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{20}}} = 60abc\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{12}}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{20}}$$

23. (Silk Road 2006) $abc=1$ шартни қаноатлантирувчи мусбат a,b,c сонлар учун

$4\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right) \le 3\left(2+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $a=\frac{x}{y},\ b=\frac{y}{t},\ c=\frac{t}{x}$ деб белгилаш киритсак, у ҳолда

$4\left(\sqrt[3]{\frac{xt}{y^2}}+\sqrt[3]{\frac{yx}{t^2}}+\sqrt[3]{\frac{yt}{x^2}}\right) \le 3\left(2+\frac{x}{y}+\frac{y}{t}+\frac{t}{x}+\frac{y}{x}+\frac{t}{y}+\frac{x}{t}\right)^{\frac{2}{3}}$ бундан

$4\sqrt[3]{xyt}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{t}\right) \le 3\left(2+\frac{x}{y}+\frac{y}{t}+\frac{t}{x}+\frac{y}{t}+\frac{t}{y}+\frac{x}{t}\right)^{\frac{2}{3}}$ *ёки*

$\frac{4}{\sqrt[3]{(xyt)^2}}(xy+yt+tx) \le 3\left(2+\frac{x+t}{y}+\frac{t+y}{x}+\frac{t+x}{t}\right)^{\frac{2}{3}}$ *бунда*

$64(xy+yt+tx)^3 \le 27((xy+yt+tx)(x+y+t)-xyt)^2$ тенгсизликни исботласак етарли.

$$27((x+y+t)(xy+yt+tx)-xyt)^2 \ge 27\left((x+y+t)(xy+yt+tx)-\frac{(x+y+t)(xy+yt+tx)}{9}\right)^2 =$$

$$=27\left(\frac{8}{9}(x+y+t)(xy+yt+tx)\right)^2 = 64(xy+yt+tx)^2\frac{(x+y+t)^2}{3} \ge 64(xy+yt+tx)^3$$

24. (Албания 2002) Мусбат a,b,c сонлар учун

$(a+b+c)+\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатга кўра

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\quad a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ тенгсизликлар њринли.

Булардан

$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 9$ эканлигини топамиз. Бу тенгсизлик ва $a+b+c\le\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$ тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириб,

$3\sqrt{3}\le\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$ ва бундан

$\frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a^2+b^2+c^2)\ge\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge(a+b+c)+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$

25. (USAMO 2004) Мусбат a,b,c сонлар учун $\left(a^5-a^2+3\right)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge\left(a+b+c\right)^3$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Мусбат x сон учун x^2-1 *ва* x^3-1 ифодалар бир хил ишоралади́р, яъни

$0\le(x^2-1)(x^3-1)=x^5-x^3-x^2+1$ *ёки* $x^5-x^2+3\ge x^3+2$ ва бу тенгсизликдан фойдалансак, у ҳолда

$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)$

бундан $\left(a^3+2\right)(b^3+2)(c^3+2)\ge(a+b+c)^3$ тенгсизликни исботлаш етарли.

Умумлашган Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидаги усулда қўллаймиз:

$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)=(a^3+1+1)(1+b^3+1)(1+1+c^3)\ge(a+b+c)^3$

26. (Жамшид) Мусбат a,b,c сонлар учун $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge(ab+bc+ca)^3$ тенгсизлини исботланг.

Исбот: Умумлашган Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидаги усулда қўллаймиз:

$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)=(a^2+ab+b^2)(c^2+b^2+bc)(ac+a^2+c^2)\ge$

$\ge(ac+ab+bc)^3$

27. (USAMO 2001) Мусбат a,b,c сонлар $a^2+b^2+c^2+abc=4$ шартни қаноатлантирса, $0<ab+bc+ca-abc\le 2$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Агар $a,b,c>1$ бўлса, бундан $a^2+b^2+c^2+abc>4$ бўлади.
Агар $a\le 1$ бўлса, у ҳолда $ab+bc+ca-abc\ge bc-abc=bc(1-a)\ge 0$
Энди $ab+bc+ca-abc\le 2$ тенгсизликни исботлаймиз.

$a=2\cos A,\ b=2\cos B,\ c=2\cos C$ ва $A,\ B,\ C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ деб белгилаш киритсак, шартга кўра $A+B+C=\pi$ эканлигини топамиз ва $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos A\cos C-2\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{2}$ тенгсизликни исботласак етарли.

Фараз этайлик $A\ge\frac{\pi}{3}$ ёки $1-2\cos A\ge 0$ бундан

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C=$$
$$=\cos A(\cos B+\cos C)+\cos B\cos C(1-2\cos A)$$

Қуйидаги $\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}-\cos A$ тенгсизлик ва $2\cos B\cos C=\cos(B-C)+\cos(B+C)\le 1-\cos A$ тенгликлардан фойдалансак,

$$\cos A(\cos B+\cos C)+\cos B\cos C(1-2\cos A)\le\cos A\left(\frac{3}{2}-\cos A\right)+\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)(1-2\cos A)=\frac{1}{2}$$

28. (Жамшид) Ҳақиқий x, y сонлар $x\neq 0,\ xy(x^2-y^2)=x^2+y^2$ шартларни қаноатлантирса, $x^2+y^2\ge 4$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $x\neq 0$ бўлгани учун $x^2+y^2>0$ бњлади ва юљоридаги шартдан фойдаланиб, $\frac{(2xy)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=1$ эканлигини топамиз. Охирги тенгликда ҳар бир қўшилувчи [-1;1] оралиққа тегишли эканлигидан $\frac{(2xy)^2}{(x^2+y^2)^2}=\sin^2\alpha$ *ва* $\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=\cos^2\alpha$ деб белгилаш мумкин. Бундан

$\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\frac{4(xy(x^2-y^2))^2}{(x^2+y^2)^4}=\frac{4}{(x^2+y^2)^2}$ *ёки* $(x^2+y^2)^2=\frac{16}{\sin^2 2\alpha}\ge 16$ бундан $x^2+y^2\ge 4$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

29. (Санкт-Петербург 2005) $x, y, t>0$ ҳақиқий сонлар учун $\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\ge\sqrt{(x+y)(y+t)(t+x)}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Аввал $\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\ge x+y$ муносабат ўринли эканлигини кўрсатамиз. Ушбу $\left(x^2+\frac{3}{4}\right)y^2-y+\frac{3}{4}\left(x^2+\frac{3}{4}\right)-x$ квадрат учҳадни y га нисбатан тузиб, унинг дискриминантини манфий эканлигини кўрсатиш етарли. Яъни

$D=1-\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\left(3x^2-4x+\frac{9}{4}\right)\le 0.$ *Ушбу* $f(x)=\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\left(3x^2-4x+\frac{9}{4}\right)$

функция $x=\frac{1}{2}$ нуқтада минимум нуқтага эга бўлишини

књриш мумкин. Бундан эса $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}-2+\frac{9}{4}\right)=1$ *ёки* $D\le 0$

топамиз. Демак, $\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\ge(x+y)$. Худди шундай

$\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\ge(x+t)$, $\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\ge(t+y)$ ва бу тенгсизликларни

ҳадма-ҳад кўпайтириш натижзасида исботи талаб этилган тенгсизликни ҳосил қиламиз.

30. (Балкан 2005) Мусбат a,b,c сонлар учун

$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Коши Буняковский тенгсизлигини қўлласак

$$\frac{a^2}{b}-b+\frac{b^2}{c}-c+\frac{c^2}{a}-a=\frac{(a-b)^2}{a}+\frac{(b-c)^2}{b}+\frac{(a-c)^2}{c}=$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{(a-b)^2}{a}+\frac{(b-c)^2}{b}+\frac{(a-c)^2}{c}\right)(a+b+c)\ge\frac{1}{a+b+c}\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2=$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left(2\max\{a,b,c\}-2\min\{a,b,c\}\right)^2\ge\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

31. (Ҳиндистон 2000) $a_i\in R,\ (i=1,2,\ldots,n),\ a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ ва

$a_1+a_2+\ldots+a_n=0$ шартлар бажарилса, $na_1a_n+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\le 0$

тенгсизликни исботланг.

Исбот: Умумийликка зарар етказмасдан

$a_1\le a_2\le\ldots\le a_{i-1}\le 0\le a_i\le a_{i+1}\le\ldots\le a_n$ деб оламиз ва

$a_k=-b_k\ \ (k=1,2,\ldots,i-1),\ \ b_k>0$ деб белгилаймиз, у ҳолда

$b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_{i-1}$ *ва* $a_i\le a_{i+1}\le\ldots\le a_n$ ва

$b_1+b_2+\ldots+b_{i-1}=a_i+a_{i+1}+\ldots+a_n$ бўлади.

$na_1a_n=-nb_1a_n$ эканлигидан $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\le nb_1a_n$ кўрсатиш етарли.

$$nb_1a_n=\left(\underbrace{b_1a_n+b_1a_n+\ldots+b_1a_n}_{(i-1)-та}\right)+\left(\underbrace{b_1a_n+b_1a_n+\ldots+b_1a_n}_{(n+1-i)-та}\right)=$$

$$=b_1(a_n+a_n+\ldots+a_n)+a_n(b_1+b_1+\ldots+b_1)\geq b_1(a_i+a_{i+1}+\ldots+a_n)+$$
$$+a_n(b_1+b_i+\ldots+b_{i-1})=b_i(b_1+b_2+\ldots+b_{i-1})+a_n(a_i+a_{i+1}+\ldots+a_n)\geq$$
$$\geq b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{i-1}^2+a_i^2+a_{i+1}^2+\ldots+a_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

Тенгсизлик исботланди.

32. (Румыния 1999) Мусбат $x_1, x_2, \ldots x_n$ сонлар $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ шартни қаноатлантирса

$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\ldots+\frac{1}{n-1+x_n}\leq 1 \; n\in N$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Юқоридаги тенгсизликни қуйидаги шаклда ёзиб,

$\frac{n-1}{n-1+x_1}+\frac{n-1}{n-1+x_2}+\ldots+\frac{n-1}{n-1+x_n}\leq n-1$ ёки

$\frac{x_1}{n-1+x_1}+\frac{x_2}{n-1+x_1}+\ldots+\frac{x_n}{n-1+x_1}\geq 1$ ва $y_i=\frac{x_i}{n-1+x_i}$ (*) белгилаш киритсак, у ҳолда $S=y_1+y_2+\ldots+y_n\geq 1$ тенгсизликни исботлаш етарли.

Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар ўртасидаги муносабатга кўра,

$$S-y_1\geq n-1\sqrt[n-1]{\frac{y_1y_2\ldots y_n}{y_1}}$$
$$S-y_2\geq n-1\sqrt[n-1]{\frac{y_1y_2\ldots y_n}{y_2}}$$
....
$$S-y_n\geq n-1\sqrt[n-1]{\frac{y_1y_2\ldots y_n}{y_n}}$$

муносабатлар ўринли. Бу тенгсизликлардан

$(S-y_1)(S-y_2)\ldots(S-y_n)\geq(n-1)^n y_1y_2\ldots y_n;$ ва (*) кўра $x_i=\frac{(n-1)y_i}{1-y_i}$ ёки

$(n-1)^n y_1y_2\ldots y_n=(1-y_1)(1-y_2)\ldots(1-y_n)$ булардан

$(S-y_1)(S-y_2)\ldots(S-y_n)\geq(1-y_1)(1-y_2)\ldots(1-y_n)$ (**) муносабатни ҳосил қиламиз.

Агар $0<S<1$ бўлса $S-y_i<1-y_i$ ёки $\prod_{i=1}^{n}(S-y_i)\leq\prod_{i=1}^{n}(1-y_i)$ бу эса (**) га зиддир. Демак $S\geq 1$ экан.

33. (Польша 1991) Ҳақиқий x, y, t сонлар $x^2+y^2+t^2=2$ шартни қаноатлантирса, $x+y+t-xyt\leq 2$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Масаланинг шартидан $|x| = \sqrt{2 - y^2 - t^2}$ ва $yt \le 1$ эканлигини кўриш мумкин. Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидаги усулда қўллаб

$$x + y + t - xyt = x(1 - yt) + y + t \le |x| \cdot |1 - yt| + |y + t| =$$
$$= \sqrt{2 - y^2 - t^2}\,|1 - yt| + |y + t| \le \sqrt{\left((2 - y^2 - t^2) + (y + t)^2\right)\left((1 - yt)^2 + 1\right)} =$$
$$= \sqrt{(2 + 2yt)(2 - 2yt + y^2t^2)}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Энди

$(1 + yt)(2 - 2yt + y^2t^2) \le 2$ эканлигини кўрсатиш етарли. Бу тенгсизликнинг чап томонидаги қавсларни очиб ихчамлаш натижасида $y^3t^3 \le y^2t^2$ ёки $yt \le 1$

ҳосил қиламиз, бундан эса юқоридаги тенгсизлик исботланади.

34. (Қозоғистон Int 2006) Ҳақиқий a, b, c ва d сонлари $a + b + c + d = 0$ шартни қаноатлантирса, $(ab + bc + ac + ad + bd + cd)^2 + 12 \ge 6(abc + abd + acd + bcd)$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Юқоридаги тенгсизликни шакл алмаштириш натижасида ушбу

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 48 \ge 8(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$ тенг кучли тенгсизликка олиб келамиз ва исботлаймиз.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 48 \ge 8(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \text{ ёки } \left((a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\right)^2 + 48$$
$$\ge -24(a + b)(b + c)(c + a)$$

Айтайлик $a + b = x,\ b + c = y,\ c + a = t$ бўлсин, у ҳолда

$-24xyt \le 48 + (x^2 + y^2 + t^2)^2$ бўлади.

Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатга кўра

$$48 + (x^2 + y^2 + t^2)^2 \ge 48 + 9\sqrt[3]{x^4y^4t^4} = 3\left(16 + \sqrt[3]{x^4y^4t^4} + \sqrt[3]{x^4y^4t^4} + \sqrt[3]{x^4y^4t^4}\right) \ge$$
$$\ge 3 \cdot 8|xyt| \ge -24xyt$$

Бундан юқоридаги тенгсизлик исботланди.

35. (USAMO 2003) Мусбат a, b, c сонлар учун

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(2b + c + a)^2}{2b^2 + (a + c)^2} + \frac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \le 8$$

тенгсизликни исботланг.

Исбот: $a + b = x,\ b + c = y,\ c + a = t$ белгилаш киритсак юқоридаги тенгсизлик қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{2(x + t)^2}{(x + t - y)^2 + 2y^2} + \frac{2(y + t)^2}{(y + t - x)^2 + 2x^2} + \frac{2(x + y)^2}{(x + y - t)^2 + 2t^2} \le 8 \quad (*)$$

Ушбу $2(t^2 + p^2) \ge (t + p)^2$ тенгсизликдан фойдалансак,

$$\frac{4(x+t)^2}{(2(x+t-y)^2+2y^2)+2y^2}+\frac{4(y+t)^2}{(2(y+t-x)^2+2x^2)+2x^2}+\frac{4(x+y)^2}{(2(x+y-t)^2+2t^2)+2t^2}\le$$
$$\le\frac{4(x+t)^2}{(x+t)^2+2y^2}+\frac{4(y+t)^2}{(y+t)^2+2x^2}+\frac{4(x+y)^2}{(x+y)^2+2t^2}=$$
$$=\frac{4}{1+\frac{2y^2}{(x+t)^2}}+\frac{4}{1+2\frac{2x^2}{(y+t)^2}}+\frac{4}{1+2\frac{t^2}{(x+y)^2}}\le\frac{4}{1+\frac{y^2}{x^2+t^2}}+\frac{4}{1+\frac{x^2}{y^2+t^2}}+\frac{4}{1+\frac{t^2}{x^2+y^2}}=$$
$$=\frac{4(x^2+t^2)}{x^2+y^2+t^2}+\frac{4(y^2+t^2)}{x^2+y^2+t^2}+\frac{4(x^2+y^2)}{x^2+y^2+t^2}=8$$

Бундан (*) исботланди.

36. (Албания 2004) Мусбат a,b,c сонларнинг кўпайтмаси бирга тенг бўлса,

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{b}+0{,}64}}+\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{c}+0{,}64}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{a}+0{,}64}}\ge 1{,}2$$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қуйидаги усулда қўллаймиз.

$$\frac{0{,}6}{\sqrt{0{,}36\left(a+\frac{1}{b}+0{,}64\right)}}+\frac{0{,}6}{\sqrt{0{,}36\left(b+\frac{1}{c}+0{,}64\right)}}+\frac{0{,}6}{\sqrt{0{,}36\left(c+\frac{1}{a}+0{,}64\right)}}\ge$$
$$\ge 1{,}2\left(\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}\right)=1{,}2$$

Чунки

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ac+a+1}=$$
$$=\frac{ac}{ac(ab+b+1)}+\frac{a}{a(bc+c+1)}+\frac{1}{ac+a+1}=\frac{ac}{a+ac+1}+\frac{a}{1+ac+a}+\frac{1}{ac+a+1}=1$$

37. (Жамшид) Мусбат x,y,t сонлар $xyt=1$ шартни қаноатлантирса,

$$x+y+t-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{t+1}\right)\ge\frac{1}{x(1+t)}+\frac{1}{y(1+x)}+\frac{1}{t(1+y)}$$

тенгсизликни исботланг.

Исбот: Бу тенгсизликни шакл алмаштириш натижасида

$$\left(t-\frac{y+1}{(x+1)y}\right)\left(x-\frac{t+1}{(y+1)t}\right)\left(y-\frac{x+1}{(t+1)x}\right)\ge 0$$ ёки

$\frac{x+t}{x+1}+\frac{x+y}{y+1}+\frac{y+t}{t+1}\geq 3$ (*)га тенг кучли тенгсизликка олиб келамиз. Коши Буняковский тенгсизлигига кўра $x+1\leq\sqrt{(x+xy)(x+t)}$ муносабат ўринли. Бундан $x+t\geq\frac{(x+1)^2}{x(1+y)}$ ёки $\frac{x+t}{x+1}\geq\frac{x+1}{x(1+y)}$ муносабатни ҳосил қиламиз. Демак

$$\frac{x+t}{x+1}+\frac{x+y}{y+1}+\frac{t+y}{t+1}\geq\frac{x+1}{x(1+y)}+\frac{1+y}{y(1+t)}+\frac{1+t}{t(1+x)}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{x(1+y)}\cdot\frac{1+y}{y(1+t)}\cdot\frac{1+t}{t(1+x)}}=3$$

38. (Жамшид) Мусбат x,y,t сонлар учун $3(x^2-x+1)(y^2-y+1)(t^2-t+1)\geq(xyt)^2+xyt+1$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Аввал $\forall t>0$ учун $3(t^2-t+1)^3\geq t^6+t^3+1$ (*) тенгсизлик ўринли эканлигини кўрсатамиз. (*) ни шакл алмаштириб, қуйидаги муносабатни ќосил қиламиз: $(t-1)^4(2t^2-t+2)\geq 0$ бу тенгсизлик $\forall t>0$ учун ўринли. Бундан
$3(x^2-x+1)^3 3(y^2-y+1)^3 3(t^2-t+1)^3\geq(x^6+x^3+1)(y^6+y^3+1)(t^6+t^3+1)$ (**)
муносабатни ҳосил қиламиз. Умумлашган Коши Буняковский тенгсизлигини қўлласак,
$(x^6+x^3+1)(y^6+y^3+1)(t^6+t^3+1)\geq(x^2y^2t^2+xyt+1)^3$ (***)
(**) ва (***) ларни ҳадма-ҳад кўпайтириб, исботи талаб этилаётган тенгсизликни ҳосил қиламиз.

39. (Беларуссия 1997) $n\in N,\ n>1$ учун
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}<n-n^{\frac{n-1}{n}}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қўлласак,

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n-1}{n}\geq n\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}}=n\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=n^{\frac{n-1}{n}}.$$

40. (Ҳиндистон 2000) Бирдан катта ҳақиқий x,y,t сонлар $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{t}=2$ тенгликни қаноатлантирса,
$\sqrt{x+y+t}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{t-1}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидаги усулда қўллаб,

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{t-1}\leq\sqrt{x+y+t}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{t-1}{t}}=\sqrt{x+y+t}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

41. (Ҳиндистон 2002) Мусбат a,b,c сонлар $a^2+b^2+c^2=3abc$ тенгликни қаноатлантирса, $\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2}\ge\frac{9}{a+b+c}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Юқоридаги тенгсизликка умумий махраж танлаб, $(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)\ge 9a^2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)^2$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик эса Коши Буняковский тенгсизлигига кўра ўринлидир.

42. (Украина 2002) Мусбат x,y,t сонлар учун $\frac{1}{(x+y+t)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{t^2}\ge\frac{28\sqrt{3}}{9\sqrt{xyt(x+y+t)}}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар ўртасидаги муносабатни қуйидаги усулда қўллаймиз:

$$\frac{1}{(x+y+t)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{9}{(x+y+t)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{t^2}\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{t^2}\right)\ge$$

$$\ge\frac{4}{9}\sqrt[4]{\frac{9}{(x+y+t)^2x^2y^2t^2}}+\frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2t^2}}\ge\frac{4}{9}\sqrt{\frac{3}{(x+y+t)xyt}}+\frac{8}{3}\sqrt{\frac{3}{xyt(x+y+t)}}=$$

$$=\frac{28\sqrt{3}}{9\sqrt{xyt(x+y+t)}}$$

43. (Украина 2001) $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ҳақиқий сонлар $a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n^2$, $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\le n^3+1$ шартларни қаноатлантирса, $n-1\le a_k\le n+1$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $d_k=|n-a_k|$ белгилаш киритсак, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n}d_k^2=\sum_{k=1}^{n}(n-a_k)^2=n\cdot n^2-2n\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\le n^3-2n\cdot n^2+n^3+1=1$$

муносабатни ҳосил бњлади. Бундан $d_k\le 1$ ёки $n-1\le a_k\le n+1$ эканлигини топамиз.

44. (Украина 2001) Мусбат a,b,c ва α,β,j $\alpha+\beta+j=1$ сонлар учун $\alpha a+\beta b+jc+2\sqrt{(\alpha\beta+\beta j+j\alpha)(ab+bc+ca)}\le a+b+c$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Тенгсизликни иккала қисмини $a+b+c$ га бўлиб ва $x=\frac{a}{a+b+c},\ y=\frac{b}{a+b+c},\ t=\frac{c}{a+b+c}$ белгилаш киритсак

$$\alpha x+\beta y+jt+2\sqrt{(\alpha\beta+\beta j+j\alpha)(xy+yt+tx)}\le\frac{\alpha^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{t^2}{2}+\frac{j^2}{2}+$$

$$+j\alpha+\alpha\beta+\beta j+xy+yt+tx=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+j)^2+\frac{1}{2}(x+y+t)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

45. (Украина 2000) Мусбат a, b сонлар учун
$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{3ab^2}+\frac{1}{3a^2b}+\frac{1}{b^3}\ge\frac{64}{3(a+b)^3}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қуйидаги усулда қўлласак,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{3ab^2}+\frac{1}{3a^2b}+\frac{1}{b^3}=(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3})+\frac{1}{3ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge2\sqrt{\frac{1}{a^3b^3}}+\frac{2}{3ab}\sqrt{\frac{1}{ab}}=\frac{8}{3\sqrt{(ab)^3}}\ge\frac{64}{3(a+b)^3}$$

46. (Украина 1999) Ҳақиқий $x_1, x_2, \dots, x_6\in[0;1]$ сонлар учун

$$\frac{x_1^3}{x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+x_6^5+5}+\frac{x_2^3}{x_1^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+x_6^5+5}+\dots+\frac{x_6^3}{x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+5}\le\frac{3}{5}$$

тенгсизликни исботланг.

Исбот: $x_1, x_2\dots x_6\in[0;1]$ эканлигидан тенгсизликнинг чап қисми қуйидаги ифодадан кичик ёки тенг, яъни

$$\frac{x_1^3}{x_1^5+x_2^5+\dots+x_6^5+4}+\frac{x_2^3}{x_1^5+x_2^5+\dots+x_6^5+4}+\dots+\frac{x_6^3}{x_1^5+x_2^5+\dots+x_6^5+4}=$$

$$=\frac{x_1^3+x_2^3+\dots+x_6^3}{x_1^5+x_2^5+\dots+x_6^5+4}\le\frac{3}{5}\quad(*)$$

ихтиёрий $t\ge0$ учун
$3t^5+2\ge5t^3\Leftrightarrow(t-1)^2(3t^3+6t^2+4t+2)\ge0$
муносабат њринли эканлигидан фойдалансак (*) келиб чиљади.

47. (Босния 2002) Мусбат a, b, c сонлари $a^2+b^2+c^2=1$ шартни қаноатлантирса,
$\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ac}+\frac{c^2}{1+2ab}\ge\frac{3}{5}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Тенгсизликни чап қисмини S билан белгилаб, Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидаги усулда љњллаб,
$S\cdot\left(a^2(1+2bc)+b^2(1+2ac)+c^2(1+2ab)\right)\ge(a^2+b^2+c^2)^2$ ёки
$S\ge\frac{1}{1+2abc(a+b+c)}$ муносабатни ҳосил қиламиз.
$a^2+b^2+c^2\ge\sqrt{3abc(a+b+c)}$ тенгсизликка кўра

$$S\geq\frac{1}{1+\frac{2}{3}3abc(a+b+c)}\geq\frac{1}{1+\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}=\frac{3}{5}$$ ни ҳосил қиламиз.

48. (Югославия 2002) Мусбат $x_1 x_2 \ldots x_{2001}$ сонлар учун $x_i^2\geq x_1^2+\frac{x_2^2}{2^3}+\frac{x_3^2}{3^3}+\frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3},\quad 2\leq i\leq 200$ шарт бажарилса $\sum_{i=2}^{2001}\frac{x_i}{x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}}>1{,}999$ тенгсизликни исботланг

Исбот: Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидаги усулда қўллаб,

$$\left(\frac{i(i-1)}{2}\right)^2\cdot x_i^2\geq\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{2^3}+\frac{x_3^2}{3^3}+\ldots+\frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3}\right)\left(1+2^3+3^3+\ldots+(i-1)^3\right)\geq\left(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{i-1}\right)^2$$

$$ёки\ \frac{x_i}{x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}}\geq\frac{2}{i(i-1)},\quad 2\leq i\leq 2001$$

эканлигини топамиз. Бундан

$$\sum_{i=2}^{2001}\frac{x_i}{x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}}\geq 2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot 2001}\right)=2\left(1-\frac{1}{2001}\right)>1{,}999$$

49. (Ҳиндистон 2002) Мусбат a,b,c сонлар учун $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}$ эканлигини кўрсатинг.

Исбот: Тенгсизликни қуйидагича ёзамиз:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c+a}{c+b}+1\right)+\left(\frac{b}{c}-\frac{a+b}{a+c}+1\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{b+c}{b+a}+1\right)\geq 3$$ ёки

$$\frac{b^2+ac}{b(c+b)}+\frac{c^2+ab}{c(a+c)}+\frac{a^2+bc}{a(b+a)}\geq 3$$

Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидаги усулда қўлласак,

$$\frac{b^2+ac}{b(c+b)}+\frac{c^2+ab}{c(a+c)}+\frac{a^2+bc}{a(a+b)}\geq\frac{(b+c)a}{b(a+c)}+\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(a+b)}{a(b+c)}\geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{(b+c)a}{b(a+c)}\cdot\frac{b(a+c)}{c(a+b)}\cdot\frac{c(a+b)}{a(b+c)}}=3$$

50. (ХМО 1998) Агар $y_i\geq 1\ (i=1,2,\ldots n)$ бўлса, $\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+\ldots+\frac{1}{1+y_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{y_1y_2\ldots y_n}}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Аввал индукция методи ёрдамида $n=2^k,\ k\in N$ сонлар учун тенгсизликни исботлаймиз.

$n=2$ да $\frac{1}{y_1+1}+\frac{1}{y_2+1}-\frac{2}{\sqrt{y_1y_2}+1}=\frac{\left(\sqrt{y_1y_2}-1\right)\left(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}\right)^2}{(y_1+1)(y_2+1)\left(\sqrt{y_1y_2}+1\right)}\geq 0$

$n=2^k$ да тенгсизлик ўринли бўлсин деб фараз қилсак, у ќолда $n=t^{k+1}$ да

$$\left(\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+\ldots+\frac{1}{1+y_{2^k}}\right)+\left(\frac{1}{1+y_{2^k+1}}+\frac{1}{1+y_{2^k+2}}+\ldots+\frac{1}{1+y_{2^{k+1}}}\right)\geq$$

$$\geq\frac{2^k}{1+\sqrt[2^k]{y_1y_2\ldots y_{2^k}}}+\frac{2^k}{1+\sqrt[2^k]{y_{2^k+1}y_{2^k+2}\ldots y_{2^{k+1}}}}\geq\frac{2^{k+1}}{1+\sqrt[2^{k+1}]{y_1\cdot y_2\ldots y_{2^{k+1}}}}$$

муносабат ўринли ва тенгсизлик $n=2^k$ $k\in N$ учун исботланди. Энди тенгсизликни $n\in N$ учун исботлаймиз. Бунинг учун $m=2^k>n$ $k\in N$ учун тенгсизлик ўринли деб фараз этсак ва $y_{n+1}=y_{n+2}=\ldots=y_m=\sqrt[n]{y_1y_2\ldots y_n}$ деб олсак, у ҳолда $\frac{1}{y_1+1}+\frac{1}{y_2+1}+\ldots+\frac{1}{y_n+1}+\frac{m-n}{1+\sqrt[n]{y_1y_2\ldots y_n}}\geq\frac{m}{\sqrt[n]{y_1y_2\ldots y_n}+1}$ бўлади. Бундан юқоридаги тенгсизлик исботланади.

51. (Ҳиндистон 2004) Ихтиёрий $x_i\in(0;\frac{1}{2}]$ сонлар учун (i=1, 2, …, n)

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^n}\leq\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^n}$$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $x_i=\cos^2\alpha_i$, $\frac{\pi}{4}\leq\alpha_i<\frac{\pi}{2}$ белгилаш киритсак, у ҳолда тенгсизлик қуйидаги кўринишга келади.

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i}{\prod_{i=1}^{n}(1-\cos^2\alpha_i)}\leq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-\cos^2\alpha_i)}\right)^n$$ ёки

$$\frac{1}{1+tg^2\alpha_1}+\frac{1}{1+tg^2\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{1+tg^2\alpha_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{tg^2\alpha_1tg^2\alpha_2\ldots tg^2\alpha_n}}$$

Агар $tg^2\alpha_i=y_i$ деб белгилаш киритсак, $y_i\geq 1$ бўлади ва $\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+\ldots\frac{1}{1+y_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{y_1y_2\ldots y_n}}$ ни исботлаш керак бўлади. Бу тенгсизлик эса 50- масалада исботланган.

52. (ХМО 2001) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ҳақиқий сонлар учун $\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}<\sqrt{n}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Тенгсизликни мусбат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар учун исботлаш етарли. Коши Буняковский тенгсизлигини қуйидаги усулда қўллаб,

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}<$$

$$<\sqrt{n\left\{\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_n}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^2\right.}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бундан

$\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2}+\frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}+..+\frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2}<1$ эканлигини кўрсатсак, юқоридаги тенгсизлик исботланади.

$$\frac{x_k^2}{\left(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2\right)}\le\frac{x_k^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{k-1}^2)(1+x_1^2+\ldots+x_k^2)}=$$

$$=\frac{1}{1+x_1^2+\ldots+x_{k-1}^2}-\frac{1}{1+x_1^2+\ldots+x_k^2}$$

бўлгани учун

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\ldots+x_k^2}\right)^2<1-\frac{1}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2}<1$ бўлади.

53. (ХМО 2004) Мусбат a, b, c сонлар $ab+bc+ca=1$ тенгликни қаноатлантирса,

$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\le\frac{1}{abc}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $9(a^3+b^3+c^3)\ge(a+b+c)^3$ тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\le\sqrt[3]{9\left(\frac{1}{a}+6b+\frac{1}{b}+6c+\frac{1}{c}+6a\right)}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+3\frac{1-ab}{c}+3\frac{1-bc}{a}+3\frac{1-ac}{b}}=\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{4-3\left((ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\right)}{abc}}\le$$

$$\le\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{4-3\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}}{abc}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Энди $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\le\frac{1}{abc}$ ёки $a^2b^2c^2\le\frac{1}{27}$ эканлиги кўрсатсак, тенгсизлик исботланади.

$$(abc)^2=(ab)(bc)(ca)\le\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

54. (ХМО 2004) Мусбат x, y, t ва a, b, c сонлар $ab+bc+ca=1$ шартни қаноатлантирса $3abc(x+y+t)\le\frac{2}{3}+ax^3+by^3+ct^3$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $1-bc=a(b+c)$ эканлигидан

$$3abcx=3a\sqrt[3]{b^2c\cdot c^2b\cdot x^3}\le a(b^2c+c^2b+x^3)=ax^3+bc(1-bc)=ax^3+bc\left(\frac{2}{3}-bc\right)+\frac{1}{3}bc\le$$

$$\le ax^3+\frac{1}{3}bc+\left(\frac{bc+(\frac{2}{3}-bc)}{2}\right)^2=ax^3+\frac{1}{3}bc+\frac{1}{9}$$

мусбатни ҳосил қиламиз. Худди шундай

$3abcy\le by^3+\frac{1}{3}ac+\frac{1}{9}$, $3abct\le ct^3+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}$ тенгсизликлар ўринли.

бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб исботи талаб этилган тенгсизликни ҳосил қиламиз.

55. (Малдова 2001) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ҳақиқий мусбат сонлар учун

$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\ge\frac{1}{n}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Юқоридаги тенгсизликни иккала қисмига умумий махраж танлаб,

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}$ ёки $n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i(a_i+1)}\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$

муносабатни ҳосил қиламиз. Умумийликка зарар етказмасдан $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n$ деб олсак, охирги тенгсизлик Чебишев тенгсизлигиа кўра ўринлидир.

56. (USAMO 1992) $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ мусбат ҳақиқий сонлари

$a_{i-1}\cdot a_{i+1}\le a_i^2$

$(i=1,2,\ldots,n-1)$ шартни қаноатлантирса

$$\frac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\ge\frac{a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}}{n}\cdot\frac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{n}$$

тенгсизликни исботланг.

Исбот: $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=k$ деб олсак. У ҳолда

$$\frac{a_0+k+a_n}{n+1}\cdot\frac{k}{n-1}\ge\frac{a_0+k}{n}\cdot\frac{a_n+k}{n}\Leftrightarrow$$

$$n^2k(a_0+a_n+k)\ge(n^2-1)(a_0+k)(a_n+k)\Leftrightarrow$$

$$k(k+a_0+a_n)\ge a_0a_n(n^2-1)$$

ушбу исботи талаб этилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ҳосил қиламиз

$a_0+a_n\ge 2\sqrt{a_0a_n}$ эканлигидан $k\ge(n-1)\sqrt{a_0a_n}$ тенгсизликни исботласак юқоридаги тенгсизлик исботланди.

$a_{i-1}\cdot a_{i+1}\le a_i^2\quad (i=1,2,\ldots,n-1)$ тенгсизликка кўра

$\frac{a_0}{a_1}\le\frac{a_1}{a_2}\le\frac{a_2}{a_3}\le\ldots\le\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ёки

$a_0a_n\le a_1a_{n-1}\le a_2a_{n-2}\le\ldots..$ муносабатни ҳосил қиламиз бундан,

$$K=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=(a_1+a_{n-1})+(a_2+a_{n-2})+\ldots\ge 2\sqrt{a_1a_{n-1}}+2\sqrt{a_2a_{n-2}}+\ldots\ge$$

$$\ge 2\sqrt{a_0a_n}+2\sqrt{a_0a_n}+\ldots=2\cdot\frac{n-1}{2}\sqrt{a_0a_n}=(n-1)\sqrt{a_0a_n}$$

Эканлиги келиб чиқади.

57. (Польша 1996) a,b,c ва x,y,t номанфий сонлар бўлиб, $x+y+t=a+b+c=1,\quad 0\le x,y,t\le\frac{1}{2}$ шартларни қаноатлантирса, $ax+by+ct\ge 8abc$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Умумийликка зарар етказмасдан $a\le b\le c$ деб оламиз. У ҳолда ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қуйидаги усулда қўллаб,

$$8abc=8ab(1-a-b)\le 2(a+b)^2(1-a-b)=2(a+b)\left[(a+b)(1-a-b)\right]\le\frac{a+b}{2}$$

тенгсизликни топамиз.

$(a-c)(x-\frac{1}{2})+(b-c)(y-\frac{1}{2})\ge 0$ муносабат ўринли эканлигидан

$ax+by+ct\ge\frac{a+b}{2}\ge 8abc$ тенгсизликни тўғрилигини топамиз.

58. (ХМО 1998) Йиғиндиси бирдан кичик бўлган $x_1,x_2,\ldots,x_n$ мусбат сонлар учун

$$n^{n+1}x_1x_2\ldots x_n(1-x_1-x_2-\ldots-x_n)\le(x_1+x_2+\ldots+x_n)(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)$$

Тенгсизликни исботланг.

Исбот: $x_{n+1}=1-x_1-x_2-\ldots-x_n$ бўлсин. У ҳолда $x_{n+1}>0$ ва ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қуйидаги усулда қўлласак

$1-x_i=x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}-x_i\ge n\sqrt[n]{\frac{x_1x_2\ldots x_{n+1}}{x_i}}\quad (i=1,2,\ldots,n+1)$ муносабат ўринли. Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириб,

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-x_i)\ge\prod_{i=1}^{n+1}n\sqrt[n]{\frac{x_1x_2\ldots x_{n+1}}{x_i}}=n^{n+1}x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}=n^{n+1}x_1x_2\ldots x_n(1-x_1-x_2-\ldots-x_n)$$

ёки $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)(x_1+x_2+\ldots+x_n)\ge n^{n+1}x_1x_2\ldots x_n(1-x_1-x_2\ldots-x_n)$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

59. (Квант) $0 \le a, b, c \le 1$ сонлар учун $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1} \le 2$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Умумийликка зарар етказмасдан $0 \le a \le b \le c \le 1$ деб оламиз. У ќолда $(1-a)(1-b) \ge 0$ ёки $a+b+c \le a+b+1 \le 2+ab$<2(1+ab) эканлигини топамиз.

Бундан, $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1} \le \frac{a}{ab+1}+\frac{b}{ab+1}+\frac{c}{ab+1} = \frac{a+b+c}{ab+1} < \frac{2(ab+1)}{ab+1} = 2$ муносабатни ќосил љиламиз.

60. (Жамшид) a, b, c, d $\in [1;2]$ сонлар учун $\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+d}{d+a} \le \frac{4(a+c)}{b+d}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $b(a-1)+a(c-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab+ac \ge b+a \Leftrightarrow \frac{a+b}{b+c} \le a$ ва

$d(c-1)+c(a-1) \ge 0 \Leftrightarrow dc+ca \ge d+c \Leftrightarrow \frac{d+c}{d+a} \le c$ эканлиги кўриниб турибди.

Бундан $\frac{4(a+c)}{(b+d)} \ge \frac{4(a+c)}{4} = a+c \ge \frac{a+b}{b+c}+\frac{d+c}{d+a}$ муносабат ўринли эканлиги келиб чиқади.

61. (Веътнам 2002) a, b, c учбурчак томонлари ва $0 \le t \le 1$ учун $\sqrt{\frac{a}{b+c-ta}}+\sqrt{\frac{b}{a+c-tb}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-tc}} \ge 2\sqrt{1+t}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қуйидаги усулда қўллаб $\sqrt{\frac{a}{b+c-ta}} = \frac{a\sqrt{1+t}}{\sqrt{(a+at)(b+c-ta)}} \ge \frac{2a\sqrt{t+1}}{a+b+c}$ тенгсизликни топамиз. Худди шундай $\sqrt{\frac{b}{a+c-tb}} \ge \frac{2b\sqrt{1+t}}{a+b+c}$, $\sqrt{\frac{c}{a+b-tc}} \ge \frac{2c\sqrt{1+t}}{a+b+c}$ тенгсизликлар ўринли. Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб, исботи талаб этилган тенгсизликни ќосил қиламиз.

62. (Жамшид) Ҳақиқий a, b, c сонлар a+b+c=0 шартни қаноатлантирса, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3 \ge 6abc$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $(ab+1-c)^2+(bc+1-a)^2+(ac+1-b)^2 \geq 0 \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ эканлигидан, юқоридаги тенгсизликни ўринли бўлиши келиб чиқади.

63. (Ўзбекистон 2001) $x_1, x_2, \ldots, x_{2002}$ мусбат сонлар $\sum_{i=1}^{2002}\frac{1}{1+x_i^2}=1$ шартни қаноатлантирса, $x_1x_2\ldots x_{2002}\geq 2001^{1001}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот: $\frac{1}{1+x_i^2}=y_i$ ($i=1, 2, \cdots, 2002$) деб белгилаш киритсак, у ќолда $y_1+y_2+\ldots+y_{2002}=1$ бњлади. Њрта арифметик ва њрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатни қуйидаги усулда қўлласак, $1-y_i=y_1+y_2+\cdots+y_{2002}-y_i\geq 2001\sqrt[2001]{\frac{y_1y_2\cdots y_{2002}}{y_i}}$ ($i=1, 2, \cdots 2002$) эканлигини топамиз ва бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириб
$\prod_{i=1}^{2002}(1-y_i)\geq\prod_{i=1}^{2002}2001\sqrt[2001]{\frac{y_1y_2\cdots y_{2002}}{y_i}}=2001^{2002}y_1y_2\cdots y_{2002}$,
$\prod_{i=1}^{2002}\frac{1-y_i}{y_i}\geq 2001^{2002}$ ёки $\prod_{i=1}^{2002}x_i\geq 2001^{1001}$ тенгсизликни ќосил қиламиз.

64. (Белоруссия 1999) Агар мусбат a, b, c сонлар $a^2+b^2+c^2=3$ тенгликни қаноатлантирса, $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geq\frac{3}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот: Мусбат x, y, z ва ν сонлар учун $\frac{x^2}{y}+\frac{z^2}{v}\geq\frac{(x+z)^2}{y+v}$ тенгсизлик ўринли эканлигидан фойдалансак

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geq\frac{(1+1)^2}{1+ab+1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geq\frac{(1+1+1)^2}{3+ab+bc+ca}\geq.$$

$$\frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{2}.$$